Tema 8: Aplicaciones. Ecuaciones en diferencias: modelos en tiempo discreto

18 de diciembre de 2011

Contexto: Bloque de Álgebra Lineal

- **Tema 6**. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices.
- **Tema 7**. Valores y vectores propios.
- $\boxed{\textbf{Tema 8}\text{. Aplicaciones.}}$
    - Aplicaciones del cálculo de los valores y vectores propios: Ecuaciones en diferencias.

Contenidos

Introducción. Ecuaciones en diferencias.

- Las **ecuaciones en diferencias** no son tan conocidas como las ecuaciones diferenciales.
- Las ecuaciones en diferencias evolucionan en un número finito de pasos finitos, mientras que una ecuación diferencial da un número infinito de pasos *infinitesimales*.
- Las teorías son bastante paralelas, es la analogía entre lo discreto y lo continuo que aparece una y otra vez en matemáticas.

Ejemplo. Colonia de bacterias.

Ejemplo

Se tiene una colonia de bacterias en la que cada bacteria se reproduce asexualmente, dividiéndose en dos bacterias tras la duplicación de su material genético. Esta división se produce cada hora.

Si la población inicial es de 100 bacterias,

- ¿cuál será el número de bacterias que tendrá la colonia cuando hayan pasado 3h.?
- ¿Y cuando hayan pasado n?

Modelo de crecimiento exponencial

La **expresión general** de la relación de recurrencia que describe el **modelo de crecimiento exponencial** es:

$$P_{n+1} = KP_n,$$

donde P_0 es la **población inicial** y K una constante positiva denominada **constante de crecimiento**.

Su solución es $\;P_n = K^n P_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

OBS: Si $K > 1$, el tamaño de la población siempre es creciente. Esta situación no es realista en términos biológicos (limitaciones de alimento o de habitat).

Modelos que incluyen estas limitaciones son: el *modelo logístico* o la *curva de reclutamiento de Beverton-Holt*.

Sucesión de Fibonacci

El siguiente ejemplo de ecuaciones en diferencias proviene de la **sucesión de Fibonacci**:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Definición

Una **sucesión** es un función cuyo dominio es $\mathbb{N}$ y cuya imagen es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Los valores $a_1, a_2, \ldots$ de la sucesión se denominan **términos** de la sucesión.

a_n es el **término n-ésimo** o **término general** de la sucesión.

Problema. Una población de conejos

Una pareja de conejos comienza a procrear a la edad de un mes y a partir de ese momento tienen como descendencia una nueva pareja de conejos cada mes.

Si comenzamos con una pareja de conejos y ninguno de los conejos nacidos a partir de esa pareja muere, ¿cuántas parejas de conejos habrá al principio de cada mes?

(Fibonacci, 1202)

Ecuación en diferencias

La ecuación en diferencias correspondiente a la sucesión de Fibonacci es:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Aparece en gran variedad de aplicaciones: la distribución de las hojas de ciertos árboles, el orden de las semillas de los girasoles, etc.

¿Cómo calcular F_{1000} sin hallar todos los términos anteriores?

Resolución de la ecuación en diferencias

OBJETIVO: Resolver la ecuación en diferencias

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Paso 1: Reducir la ecuación a una ecuación de un paso

$$u_{n+1} = Au_n.$$

La situación es ahora análoga a los ejemplos anteriores, pero ahora $A \in \mathcal{M}_2$ y u_{n+1} y u_n vectores de dos componentes.

Resolución de la ecuación en diferencias

Si $u_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$, entonces $\left.\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\ F_{n+1} &= F_{n+1} \end{aligned}\right\}$

puede escribirse como

$$u_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u_n.$$

Observación

Éste es un truco habitual para una **ecuación en diferencias lineal de orden** s. $s-1$ ecuaciones de la forma $F_{n+1} = F_{n+1}$ se combinan con la ecuación dada en un sistema de un paso. Para Fibonacci $s = 2$.

Resolución de la ecuación en diferencias

Paso 2: Resolver la ecuación $u_{n+1} = Au_n$.

$$\begin{aligned} &u_0, \\ &u_1 = Au_0, \\ &u_2 = Au_1 = A^2 u_0, \\ &\quad \vdots \\ &u_n = A^n u_0 \end{aligned}$$

El problema ahora es hallar un modo rápido de calcular A^n.

LA CLAVE: los **valores y vectores propios**.

Resolución de la ecuación en diferencias

$A \in \mathcal{M}_k$ **diagonalizable** $\Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1} \Rightarrow$ $u_n = A^n u_0 = PD^nP^{-1}u_0$.

Como las columnas de P son los vectores propios de A, si $C = P^{-1}u_0$, entonces la solución

$$
\begin{aligned}
u_n &= PD^nC = \\
&= (x_1|x_2|\cdots|x_k)\begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
&= c_1\lambda_1^n x_1 + c_2\lambda_2^n x_2 + \cdots + c_k\lambda_k^n x_k.
\end{aligned}
$$

Resolución de la ecuación en diferencias

EN EL CASO DE FIBONACCI:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los **valores propios** son: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Los **subespacios propios** son: $V_1 = \langle v_1 \rangle$ y $V_2 = \langle v_2 \rangle$, donde

$$v_1 = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{5})/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})/2 & (1-\sqrt{5})/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolución de la ecuación en diferencias

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/(\lambda_1 - \lambda_2) & -\lambda_2/(\lambda_1 - \lambda_2) \\ -1/(\lambda_1 - \lambda_2) & \lambda_1/(\lambda_1 - \lambda_2) \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$C = P^{-1}u_0 = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(\lambda_1 - \lambda_2) \\ -1/(\lambda_1 - \lambda_2) \end{pmatrix}$$

$$u_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = c_1\lambda_1^n \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\lambda_2^n \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^n - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Resolución de la ecuación en diferencias

OBS 1: F_n es un entero positivo.

OBS 2: $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\lambda_1^{n+1}}{\lambda_1^n} = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618$$

Resolución de la ecuación en diferencias

EN GENERAL:

- Si u_0 **es un vector propio de la matriz** A asociado al valor propio λ, entonces $u_n = \lambda^n u_0$ es solución de la ecuación en diferencias $u_{n+1} = Au_n$.

- En general u_0 no es vector propio, pero sí es **combinación lineal de vectores propios**, en este caso:

  Si $u_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k$ siendo $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vectores propios de A asociados respectivamente a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, entonces

$$u_n = c_1\lambda_1^n x_1 + c_2\lambda_2^n x_2 + \cdots + c_k\lambda_k^n x_k.$$

OBS: Así sucede en el ejemplo de Fibonacci.

Ejemplo. Flujo migratorio de una población de aves.

Ejemplo

Un territorio está dividido en tres zonas Z_1, Z_2 y Z_3 entre las que habita una población de aves. Cada año y debido a diversas razones (disponibilidad de alimentos, peleas por el territorio, etc.) se producen los siguientes flujos migratorios entre las distintas zonas:

- En Z_1: un 60 % permanece en Z_1, un 10 % emigra a Z_2 y un 30 % emigra a Z_3.
- En Z_2: un 10 % emigra a Z_1, un 80 % 'permanece en Z_2 y un 10 % emigra a Z_3.
- En Z_3: un 10 % emigra a Z_1, un 20 % emigra a Z_2 y un 70 % permanece en Z_3.

Ejemplo. Flujo migratorio de una población de aves.

Supongamos que tenemos una situación inicial en la que de la población total de aves un 30 % viven en Z_1, un 20 % viven en Z_2 y un 50 % viven en Z_3.

¿Cuál será la distribución de la población de aves a los 2 años?

¿Y a los n años?

Ejemplo. Flujo migratorio de una población de aves.

La **matriz que define el flujo migratorio** es:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

El **vector que describe la situación inicial** es:

$$u_0 = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Flujo migratorio de una población de aves.

Pasado **un año**:

$$u_1 = Au_0 = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}29 \\ 0{,}46 \end{pmatrix}.$$

Pasados **dos años**:

$$u_2 = Au_1 = A^2 u_0 = \begin{pmatrix} 0{,}225 \\ 0{,}349 \\ 0{,}426 \end{pmatrix}.$$

Pasados *n* **años**:

$$u_n = A^n u_0.$$

Ejemplo. Flujo migratorio de una población de aves.

Para calcular u_n utilizaremos que $A = PDP^{-1}$ y por tanto $A^n = PD^nP^{-1}$, D matriz diagonal.

Los **valores propios** de A son: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0{,}6, \lambda_3 = 0{,}5$.

Los **subespacios propios** asociados son: $V_1 = \langle v_1 \rangle$, $V_2 = \langle v_2 \rangle$, $V_3 = \langle v_3 \rangle$, donde

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}25 \\ 1{,}75 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. Flujo migratorio de una población de aves.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2{,}25 & -1 & 1 \\ 1{,}75 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 1{,}25 & -0{,}75 & 0{,}25 \\ 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}2 \end{pmatrix}$$

Si $u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ y $u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ entonces

$$u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6^n & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Flujo migratorio de una población de aves.

$$u_n = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = 0{,}2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}25 \\ 1{,}75 \end{pmatrix} + 0{,}6^n \; 0{,}35 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ 0{,}5^n \; 0{,}1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Como $lim_{n\to\infty} 0{,}6^n = 0$ y $lim_{n\to\infty} 0{,}5^n = 0$, entonces

$$lim_{n\to\infty} u_n = 0{,}2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}25 \\ 1{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}4 \\ 0{,}35 \end{pmatrix}.$$

Observación

El vector al que converge u_n es un vector propio correspondiente al valor propio 1 de la matriz A.

Esto es cierto independientemente de cual sea el vector inicial u_0 porque siempre $x_0 + y_0 + z_0 = 1$ ya que la suma de los porcentajes de aves en las zonas Z_1, Z_2 y Z_3 es siempre el 100 %.

Modelo de Leslie

En muchas especies la reproducción es altamente dependiente de la edad. Ahora estudiaremos un modelo de población en tiempo discreto estructurado por edades: el **modelo de Leslie** (Patrick Holt Leslie (1900-1974)).

El modelo de Leslie estudia una población en la que:

- Los animales pueden vivir hasta una **edad máxima** de k años (u otra unidad de tiempo).
- La cantidad de machos en la población es siempre un porcentaje fijo de la población de hembras. **Sólo se estudian las hembras**.

Modelo de Leslie

Se divide la población de hembras en $k+1$ grupos de edad:

- $x_i^{(n)}$: hembras de edad i vivas en el instante n, $0 \leq i \leq k$.
- P_i: fracción de hembras de edad i que seguirán vivas un año después.
- F_i: número medio de crías hembras nacidas de una hembra de edad i.

Sea

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} x_0^{(n)} \\ x_1^{(n)} \\ \vdots \\ x_k^{(n)} \end{pmatrix}$$

el **vector de distribución de edades** en el instante n.

Modelo de Leslie

- Número de hembras de edad 0 en el instante $n+1$:

$$x_0^{(n+1)} = F_0 x_0^{(n)} + F_1 x_1^{(n)} + \cdots + F_k x_k^{(n)}.$$

- Número de hembras de edad 1 en el instante $n+1$:

$$x_1^{(n+1)} = P_0 x_0^{(n)}.$$

- Número de hembras de edad j en el instante $n+1$:

$$x_1^{(n+1)} = P_0 x_0^{(n)}, \; j = 1, \ldots, k.$$

En notación matricial:

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)}, \ n \geq 1, \text{ donde}$$

$$A = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_{k-1} & F_k \\ P_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_{k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

A se denomina **matriz de Leslie**.

Su solución es: $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$.

Para calcularla utilizaremos que $A = PDP^{-1}$ (si A es diagonalizable).

Comportamiento a largo plazo

Teorema

Sea A matriz de Leslie. A tiene un valor propio $\lambda_1 > 0$ dominante siempre que existan dos grupos de edades fértiles consecutivos, i.e., cuando $F_i F_{i+1} > 0$ para algún $i \in \{1, \ldots, k-1\}$

Observación

Si se toman los intervalos de tiempo suficientemente pequeños, esta condición se tendrá siempre.

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Si $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, entonces decimos que λ_1 es un **valor propio dominante** de A.

Comportamiento a largo plazo

Sea v_1 un vector propio asociado al valor propio dominante λ_1. Entonces

$$\lim_{n \to \infty} x^{(n)} = c\lambda_1^n v_1,$$

donde c es una constante que depende de las cantidades iniciales $x^{(0)}$.

A λ_1 se le denomina **parámetro de crecimiento** de la población. La población finalmente:

- Crece si $\lambda_1 > 1$.
- Decrece si $0 < \lambda_1 < 1$.
- Se estabiliza si $\lambda_1 = 1$.

Comportamiento a largo plazo

Además,

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = c\lambda_1^n v_1$$

$$\Downarrow$$

$$x^{(n)} \simeq \lambda_1 x^{(n-1)} \text{ para valores grandes de } n$$

$$\Downarrow$$

La proporción de hembras en cada uno de los grupos de edad se mantiene constante para valores grandes de n, i.e.,

$$\frac{x_j^{(n)}}{x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + \cdots + x_k^{(n)}}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

tiende a estabilizarse a largo plazo.

Los valores a los que tienden dichas proporciones se denominan **distribución de edades estable**.

Comportamiento a largo plazo

Observación

Un vector propio correspondiente al valor propio dominante λ_1 nos proporciona una distribución de edades estable.

Ejemplo. Modelo de Leslie

Ejemplo

Supongamos que una población de animales hembras está dividida en dos clases de edad. En cada periodo el 8 % de la primera pasa a la segunda. El número medio de crías hembras de las hembras de la primera clase es de 1,5 y el de la segunda es de 2.

Si inicialmente hay 100 hembras de cada clase de edad:

- Determínese la distribución de hembras en el instante 2.
- Estúdiese el comportamiento de la población a largo plazo.

Ejemplo. Modelo de Leslie

La expresión matricial es:

$$\begin{pmatrix} x_0^{(n+1)} \\ x_1^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 2 \\ 0{,}08 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^{(n)} \\ x_1^{(n)} \end{pmatrix}$$

y

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

En el instante 1:

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 2 \\ 0{,}08 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. Modelo de Leslie

En el instante 2:

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 2 \\ 0{,}08 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 350 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 541 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

Comportamiento a largo plazo:

- Valores propios de A: $\lambda_1 = 1{,}6, \lambda_2 = -0{,}1$.
- **Parámetro de crecimiento**: $\lambda_1 = 1{,}6$, la población **crece**.
- Un vector propio asociado a $\lambda_1 = 1{,}6$:

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. Modelo de Leslie

- **Distribución de edades estable:**
  - **Las hembras de edad 0 tienden a ser el 95 % de la población** pues
  $$\frac{20}{20+1} = 0{,}952381.$$
  - **Las hembras de edad 1 tienden a ser el 5 % de la población** pues
  $$\frac{1}{20+1} = 0{,}047619.$$