Universidad de Alcalá
Grado en Tecnologías de la Telecomunicación
Cálculo II

Soluciones de la Práctica 2

1. (a) $z_x = 2x\text{sen}(y^2)$, $z_y = 2x^2y\cos(y^2)$, $z_{xx} = 2\text{sen}(y^2)$, $z_{xy} = 4xy\cos(y^2)$, $z_{yy} = 2x^2(\cos(y^2) - 2y^2\text{sen}(y^2))$.
   (b) $z_x = 2xe^{x^2+y^2}$, $z_y = 2ye^{x^2+y^2}$, $z_{xx} = 2(1+2x^2)e^{x^2+y^2}$, $z_{yy} = 2(1+2y^2)e^{x^2+y^2}$, $z_{xy} = 4xye^{x^2+y^2}$.
   (c) $w_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $w_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $w_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $w_{xx} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $w_{xy} = \frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $w_{xz} = \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $w_{yy} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $w_{yz} = \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $w_{zz} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.
   (d) $z_x = \frac{y}{1+x^2y^2}$, $z_y = \frac{x}{1+x^2y^2}$, $z_{xx} = \frac{-2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}$, $z_{xy} = \frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}$, $z_{yy} = \frac{-2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}$
   (e) $z_x = z_y = \frac{1}{\sqrt{1-(x+y)^2}}$, $z_{xx} = z_{yy} = z_{xy} = \frac{x+y}{(1-(x+y)^2)^{3/2}}$.
   (f) $z_x = yx^{y-1}$, $z_y = x^y\ln(x)$, $z_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$, $z_{xy} = (1 + y\ln(x))x^{y-1}$, $z_{yy} = x^y(\ln x)^2$.
   (g) $z_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$, $z_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$, $z_{xx} = \frac{2(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$, $z_{yy} = \frac{2(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$, $z_{xy} = \frac{-4xy}{(1+x^2y^2)^2}$.

2. La pendiente de la recta tangente es $m = 1$. Ecuación de la recta en forma paramétrica:

$$r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. (a) $\nabla(f)(P) = (11, -2)$. (b) $\nabla(f)(P) = (3, 4, -108)$. (c) $\nabla(f)(P) = (4/9, 4/9)$.

4. En todos los casos, la dirección en la que se anula la derivada direccional (también llamada *dirección de variación nula*) es la perpendicular al gradiente de la función en el punto y, por lo tanto, es tangente a la curva de nivel correspondiente. La dirección de máximo crecimiento es la del gradiente, y la de máximo decrecimiento es la opuesta al gradiente, en ambos casos perpendiculares a la curva de nivel que pasa por el punto. (i) La curva de nivel es $z = 1$ para todos los puntos. $\nabla(z)(1,0) = (2,0)$; $\nabla(z)(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = (\sqrt{3}, 1)$; $\nabla(z)(0,1) = (0,2)$. (ii) La

curva de nivel es $z = 1$ para todos los puntos. $\nabla(z)(2, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, 2)$, $\nabla(z)(-\frac{1}{2}, -2) = (-2, -\frac{1}{2})$. (iii) La curva de nivel es $z = 1$ para $(0, 1)$, y $z = 0$ para $(1, 1)$. $\nabla(z)(0, 1) = (0, 1)$, $\nabla(z)(1, 1) = (-2, 1)$.

5. (a) $3\sqrt{2}/2$. (b) $13\sqrt{6}/6$. (c) $-4e^5/5$. (d) $-1/5$.

6. (a) $a = 4$. (b) $a = 8$. (c) $a = 5$. (d) $b = -15/4$, a puede tomar cualquier valor.

7. *a*) Utilizando la diferencial de la función $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ en el punto $(2, 1)$, se obtiene un valor aproximado de $3,025$.

   b) Utilizando la diferencial de función $f(x, y, z) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{y \cdot z}}$ en el punto $(8, 2, 2)$, se obtiene un valor aproximado de $1,00041\widehat{6}$.

8. La cota superior al error cometido es π.

   Nota: El volumen calculado del cono es $V = \frac{20}{3}\pi$, por lo tanto la cota superior del error representa un 15 % del volumen.

9. (a) Plano tangente, $6x+8y-z-25 = 0$, recta normal $r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 3 + 6t \\ y & = & 4 + 8t \\ z & = & 25 - t \end{array} \right.$.

   (b) Plano tangente, $\pi x+y+z-2\pi = 0$, recta normal $r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 + \pi t \\ y & = & \pi + t \\ z & = & t \end{array} \right.$.

   (c) $6x+3y+2z-49 = 0$, $r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 6 + 6t \\ y & = & 3 + 3t \\ z & = & 2 + 2t \end{array} \right.$. (d) $x+y+2z-2 = 0$, $r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 + t \\ y & = & 1 + t \\ z & = & 2t \end{array} \right.$. (e) $4x + y + z - 13 = 0$, $r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2 + 4t \\ y & = & 1 + t \\ z & = & 4 + t \end{array} \right.$.

10. (a) Para la primera superficie, $P = (0, 3, 12)$; para la segunda, $P = (1/2, -1, -31/4)$. (b) Son los planos paralelos a la superficie por los puntos $(1, 2, 2)$, $(-1, -2, -2)$. (c) $-6x + 11y + 14z - 2 = 0$, $r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 - 6t \\ y & = & 2 + 11t \\ z & = & -1 + 14t \end{array} \right.$

11. (*a*) Los puntos son $A = (-1, 1/2, 1/2)$ y $B = (-1, -1/2, 1/2)$. (*b*) No existen planos tangentes que sean paralelos al plano dado.

12. (*a*) La superficie es un cono de eje vertical con vértice en el punto $(1, 0, 2)$, puesto que ningún vector normal a esta superficie puede ser vertical no puede existir un plano tangente que sea horizontal. (*b*) Analizando la condición $\nabla g = k(0, 0, 1)$ junto con la ecuación de la

superficie $g(x,y,z)=0$, se llega a que $k=0$. El punto donde $\nabla g=0$ es el vértice $(1,0,2)$, donde no existe plano tangente.

13. (a) La dirección en el plano xy viene dada por $(-1,-\frac{12}{5})$. (b) El aumento más rápido, $(-4,-2)$, y la disminución más rápida, $(4,2)$.

14. En la dirección de máxima disminución de temperatura, la del vector $(1,3,6)$.

15. (a) $z'(\pi/2) = -\pi^3/8$. (b) $w_s(2,\pi/3) = \sqrt{3}+\frac{1+\sqrt{3}}{6}\pi$, $w_t(2,\pi/3) = \sqrt{3}-1+\frac{1-\sqrt{3}}{3}\pi$. (c) $w_s(2,4)=3204$, $w_r(2,4)=374$.

16. $\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = -\frac{1}{6}$

17. $\nabla(g)(1,2) = (1/4,-1/4)$.

18.

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{n\,R}{V-n\,b} \qquad\qquad \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{V-n\,b}{\left[\frac{2a\,n^2}{V^3}(V-n\,b)-\left(P+\frac{a\,n^2}{V^2}\right)\right]}$$

19. (a) $z_x = \frac{-2xy}{1+e^z}$, $z_y = \frac{-x^2}{1+e^z}$. (b) $z_x = \frac{-2x-z^2}{2xz-ye^z}$, $z_y = \frac{-2y+e^z}{2xz-ye^z}$. (c) $z_x = -\frac{zx^{z-1}-y^x\ln(y)}{x^z\ln(x)}$, $z_y = \frac{y^{x-1}}{x^{z-1}\ln(x)}$.