ÁLGEBRA LINEAL

Hoja de problemas 3

Aplicaciones lineales

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x, y) = (x + y, 2x - y, 2x + 2y).$$

   (a) Hallar la matriz coordenada de f respecto de las bases canónicas.
   (b) Obtener bases, dimensión y ecuaciones del núcleo y de la imagen de f.
   (c) Hallar la matriz coordenada de f respecto de la base $B = \{(1, 1), (-1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y de la base $B = \{(-1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x, y, z) = (-2y, x - y + z, z + x).$$

   (a) Hallar la matriz de f respecto de la base $B = \{(0, 2, 1), (1, 0, 1), (-1, 0, 0)\}$.
   (b) Usar dicha matriz para calcular $f(-2, 2, 2)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por:

$$f(1, 0, 1) = (1, 1, 1, 0)$$
$$f(-1, 2, 0) = (1, -3, 0, 1)$$
$$f(0, -1, -1) = (-1, 0, -1, 0)$$

   Hallar la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas y $\mathrm{Ker}(f)$.

4. Sea $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = (x + y,\ z,\ -t).$$

   Se pide:

   (a) Probar que efectivamente f es una aplicación lineal.
   (b) Obtener bases, dimensión y ecuaciones del núcleo y de la imagen de f.

5. Sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por:

$$f(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (a_0 + a_1 + a_2, a_0 - 2a_1, a_2, -a_0),$$

   donde E es el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Hallar la matriz coordenada de f respecto de las bases

$$B_1 = \{1, t, t^2\}$$

   y

$$B_2 = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0)\}.$$

   Utilizar dicha matriz para hallar $f(1 + t)$.

6. Siendo E el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales y F el espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales, se considera la aplicación lineal $f : E \to F$ definida como sigue:

$$f(a+bt+ct^2) = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(1) & p(0) \end{pmatrix}.$$

Se pide:

(a) Hallar la matriz coordenada de f respecto a la base

$$B_1 = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$$

de E y a la base canónica de F.

(b) *Haciendo uso de la matriz hallada en* (a), hallar $f(p)$, siendo $p = 3+2t+t^2$.

(c) *Haciendo uso de la matriz hallada en* (a), hallar una base del subespacio $\mathrm{Ker}(f)$.

7. Siendo E el espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales y F el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales, se considera la aplicación lineal $f : E \to F$ definida como sigue:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + (b+c)t + dt^2.$$

Se pide:

(a) Hallar la matriz coordenada de f respecto a la base

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de E y a la base canónica de F.

(b) *Haciendo uso de la matriz hallada en* (a), hallar $f(C)$, siendo $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Siendo E el espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales se considera la aplicación lineal $f : E \to E$ dada por

$$f(A) = A + A^T,$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A.

Se pide:

(a) Probar que efectivamente f es una aplicación lineal.

(b) Hallar la matriz coordenada de f respecto a la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de E.

(c) *Haciendo uso de la matriz hallada en* (b), hallar $f(C)$, siendo $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Se considera la aplicación lineal $f : E \to E$ dada por

$$f(p(t)) = p'(t)$$

(es decir la imagen de un polinomio es su derivada).

Se pide:

(a) Hallar la matriz coordenada de f respecto a la base $B = \{t, 1+t, t^2\}$ de E.

(b) *Haciendo uso de la matriz hallada en* (a), hallar $f(1 + 2t + 2t^2)$.

10. Sean E el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales y F el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. Se considera la aplicación lineal $f : E \to F$ dada por

$$f(p(t)) = \int_0^t p(s)ds$$

(es decir la imagen de un polinomio es su integral entre 0 y t: una primitiva de dicho polinomio que en 0 toma el valor 0).

Se pide:

(a) Hallar la matriz coordenada de f respecto a la base $B = \{1, 1+t, 1+t^2\}$ de E y a la base canónica de F.

(b) *Haciendo uso de la matriz hallada en* (a), hallar $f(3 + t + t^2)$.