ÁLGEBRA LINEAL

Hoja de problemas 2

Espacios vectoriales. Cambio de base.

1. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales dados. En caso afirmativo, hallar una base del subespacio.

   (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - y + 2z = 3x + y = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

   (b) $W = \{M \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) |\ M = M^T\}$ de $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.

   (c) $W = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) |\ 2p(0) - p(1) = 2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

2. Estudiar si:

   (a) $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (1, 0, -3)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

   (c) $B = \{-x^2 + x + 5, 3x^2 + 5x + 3, 2x^2 + 2x - 1\}$ es base de $P_2(\mathbb{R})$.

3. En el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales se considera el subespacio vectorial formado por los polinomios $p(t)$ que verifican

$$p'(1) = 0,\ p'(2) = 0.$$

   Hallar una base de dicho subespacio.

4. Calcular el espacio nulo y el espacio de columnas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Dados los vectores $v_1 = (1, 2, -1, 1), v_2 = (2, 3, -1, 2), v_3 = (1, 3, -2, 1)$ y $v_4 = (2, 1, 1, 2)$ de $\mathbb{R}^4$, se pide:

   (a) Estudiar si son base de $\mathbb{R}^4$.

   (b) De no ser así, ampliar a una base de $\mathbb{R}^4$ y obtener las coordenadas del vector $v = (4, 1, 0, 1)$ en dicha base.

6. Dada la base de $\mathbb{R}^3$

$$B_1 = \{(1, 0, -2),\ (0, 2, 1),\ (1, 1, -2)\}\ ,$$

   hallar las matrices de cambio de base de B_1 a B_c y de B_c a B_1, siendo B_c la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$B_c = \{(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)\}\ .$$

   Dado el vector $u = (1, -1, 3)$, calcular sus coordenadas en B_1.

7. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases:

$$B_1 = \{(0,2,2),(2,0,-1),(3,0,0)\} \qquad \text{y}$$

$$B_2 = \{(2,0,2),(1,2,0),(0,0,1)\}.$$

   (a) Hallar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

   (b) Dado el vector u de coordenadas $(1,1,1)$ respecto de la base B_1, calcular sus coordenadas en B_2.

8. En el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 1 con coeficientes reales se consideran la base $B_1 = \{t, 1\}$ y la base $B_2 = \{1+t, 1-t\}$.

   Se pide:

   (a) Calcular las matrices de cambio de base de B_1 a B_2 y de B_2 a B_1 (indicando claramente cuál es una y cuál es otra).

   (b) Dado el polinomio $p(t) = t + 3$, usar la matriz de cambio de base adecuada para calcular sus coordenadas en la base B_2.

9. En el espacio vectorial real $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se considera la base

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Hallar la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a B_1, y calcular las coordenadas de $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ en B_1.

10. En el espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales se consideran la base canónica B_c y la base

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Se pide:

   (a) Calcular las matrices de cambio de base de B_1 a B_c y de B_c a B_1.

   (b) Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, usar la matriz de cambio de base adecuada para calcular sus coordenadas en la base B_1.

11. Dada la siguiente base de $\mathbb{R}^4$:

$$B = \{(1,0,2,1),(-1,1,0,0),(-1,0,2,1),(1,-1,0,1)\},$$

   se pide hallar la matriz de cambio de base de B a la base canónica de $\mathbb{R}^4$, la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ a B, y las coordenadas del vector $(1,-2,0,1)$ en B.

12. En el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales se consideran la base canónica $B_c = \{1, t, t^2, t^3\}$ y la base $B_1 = \{t^2 + t^3, t + t^2, t, 1\}$.

    Se pide:

    (a) Calcular las matrices de cambio de base de B_1 a B_c y de B_c a B_1.

    (b) Dado el polinomio $1 + t + t^2 + t^3$, usar la matriz de cambio de base adecuada para calcular sus coordenadas en la base B_1.

13. En el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales se consideran la base $B_1 = \{t^3, t^2, t, 1\}$ y la base $B_2 = \{t^3, t + t^2, 1 + t, 1\}$.

    Se pide:

    (a) Calcular las matrices de cambio de base de B_1 a B_2 y de B_2 a B_1.

    (b) Dado el polinomio $t^3 + t^2 + t$, usar la matriz de cambio de base adecuada para calcular sus coordenadas en la base B_2.