ÁLGEBRA LINEAL

Hoja de problemas 6

Espacios Euclídeos

1. Hallar, mediante el proceso de Gram-Schmidt, una base ortonormal para el subespacio de $\mathbf{R}^4$ generado por los vectores $a_1 = (2, 0, 2, 0)$, $a_2 = (1, -1, 1, 0)$, $a_3 = (2, -2, 0, 0)$.

2. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, consideramos el subespacio vectorial $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}$. Determina las ecuaciones implícitas del complemento ortogonal $U^\perp$. Calcula la proyección ortogonal del vector $(1, 1, 2)$ sobre U y sobre $U^\perp$.

3. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, consideramos el subespacio vectorial U de ecuación cartesiana $U \equiv x + y = 0$. Determina las ecuaciones paramétricas e implícitas del complemento ortogonal $U^\perp$. Calcula la proyección ortogonal del vector $b = (1, 2, 3)$ sobre U.

4. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual, se considera el subespacio $U = \mathcal{L}\{(1, -1, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, -1)\}$.
   (a) Calcula el complemento ortogonal $U^\perp$ de U dando una base y las ecuaciones implícitas.
   (b) Halla una base ortonormal de U.
   (c) Determina una descomposición del vector $v = (1, 2, 3, 4)$ en suma de dos vectores, uno perteneciente al subespacio U y el otro a $U^\perp$.
   (d) Calcula las distancia de v a U y a $U^\perp$.

5. Halla una base ortogonal del subespacio de $U \subset \mathbb{R}^4$ de ecuación $x + y - z + w = 0$. Determina la proyección del vector $v = (1, 0, 0, 1)$ sobre U y calcula la distancia de v a U.

6. Como en el problema 3, calcula la proyección ortogonal de $b = (1, 2, 3)$ sobre el espacio generado por las columnas de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Resolver las *ecuaciones normales*

$$A^T A x = A^T b$$

y, una vez hallada la solución $\bar{x}$ de dicho sistema lineal, hallar la proyección buscada mediante $p = A\bar{x}$.

(b) Calcular la *matrix de proyección*

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T$$

y comprobar que $p = Pb$ es la proyección calculada en (a).

7. Calcular la recta de regresión $b = C + Dt$ para los datos $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4$, $b_1 = 3, b_2 = 4, b_3 = 5, b_4 = 7$ (es decir la recta de ecuación $b = C + Dt$ que mejor se ajusta, en el sentido de los mínimos cuadrados, a los puntos $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 7)$). Llamando $\bar{x} = (\bar{C}, \bar{D})$ a la solución, $p = A\bar{x}$ (la proyección de b sobre el espacio de columnas de A, que nos da los valores en los puntos t_i de la recta de regresión calculada) y $e = b - p$ al vector de *residuos*, se pide explicar por qué se tienen las siguientes relaciones, bien conocidas en estadística:
$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0,$$
$$t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + t_4 e_4 = 0.$$

8. Consideremos el problema de calcular una parábola de regresión $b = Dt + Et^2$ (es decir imponemos que el término constante sea $C = 0$) para los datos $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4$. Sea $\bar{x}$ el vector solución de las ecuaciones normales $A^T A x = A^T b$ y sea $e = b - A\bar{x}$ el vector de *residuos*. Se pide explicar por qué se tendrá necesariamente (independientemente de cuál sea el vector b)
$$e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 = 0.$$
pero ahora no puede asegurarse que sea nula la suma de los residuos
$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$
Deducir qué otra relación verificarán e_1, e_2, e_3, e_4.