Práctica N$^{\underline{0}}$ 4

Aplicaciones Lineales y Diagonalización

1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y, y, x - 2y)$.

   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$.

   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x/2 - y + 3z + 1$.

   (d) $f : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $f(A) = A^t$.

   (e) $f : \mathbb{R}_3[t] \to \mathbb{R}^3$, $f(p) = (p'(0), p''(0), \int_0^1 p(t)dt)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$. Determinar el nucleo y la imagen de f.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo dado por $f(x, y, z) = (-x + y + 2z, -z, 3y)$.

   (a) Hallar las ecuaciones de f respecto a la base $B = \{(-1, 0, 0), (0, 2, 1), (0, 2, -1)\}$ y obtener las coordenadas respecto a B de $f(-3, -1, 1)$.

   (b) Hallar las ecuaciones de f respecto a las bases $C = \{(1, 1, 1), (0, 0, 3), (0, 2, -1)\}$ y $C^* = \{(1, -1, 1), (2, 1, 3), (3, 0, 3)\}$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal determinada por $f(2, -1) = (1, 0, -1, 3)$ y $f(4, 1) = (2, -2, 3, 1)$. Hallar la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas y las ecuaciones de la imagen de f.

5. Sea $f : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, a + b + c, 0)$.

   (a) Demostrar que f es lineal y calcular su matriz respecto a las bases canónicas.

   (b) Obtener la dimensión, bases y ecuaciones del nucleo y de la imagen de f.

   (c) Obtener la matriz de f respecto a las bases

   $$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \ \mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

6. Si $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz de f respecto a $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$, calcular $f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. Sea $F = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ respecto a la base canónica. Encontrar bases de los subespacios $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ en función de α.

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + y + z, \alpha x + y + z, 3x + \alpha y + 2z)$

   (a) Determinar los valores de α para los que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

   (b) Para $\alpha = 2$ hallar una base de $\mathrm{Im}(f)$ y sus ecuaciones implícitas.

   (c) Determinar la matriz de f respecto a la base $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

9. Determinar los valores de a, b y c para los que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$ es $\mathbb{R}$-diagonalizable.

10. Calcular A^n siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido como $f(x, y, z) = (x - y, -ax + y, -x - y + 2z)$.

    (a) Determinar el valor o valores de a para los que el nucleo de f es el subespacio nulo.

    (b) Determinar para qué valores de a, el endomorfismo f tiene autovalores dobles y si, en ese caso, es diagonalizable.

    (c) Para $a = 1$ calcular la matriz A de f respecto a la base canónica y A^n.

12. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

    (a) Determinar los valores de a para los que A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

    (b) Obtener la dimensión, bases y ecuaciones del $\mathrm{Ker}(f)$ y de la $\mathrm{Im}(f)$ en función de a.

    (c) Para $a = 4$ encontrar matrices D diagonal y P invertible tales que $D = P^{-1}AP$. Calcular como aplicación A^n.

13. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

    (a) Determinar los valores de a para los que A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

    (b) Obtener la dimensión, bases y ecuaciones del núcleo y de la imagen de f en función de a.

    (c) Para $a = 4$ encontrar matrices D diagonal y P invertible tales que $D = P^{-1}AP$. Calcular como aplicación A^n.

14. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido como $f(x, y, z) = (ax, -bx + y + z, ax + 2z)$, y sea A su matriz respecto a la base canónica.

   (a) Determinar los valores de a y b para los que A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

   (b) Obtener bases, dimensión y ecuaciones del núcleo y de la imagen de f.

   (c) Para $a = 0$ y $b = 1$, encontrar matrices D diagonal y P invertible tales que $D = P^{-1}AP$. Calcular como aplicación A^n.