Práctica N$^{\underline{0}}$ 3

Espacios Vectoriales

1. Analizar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales y para aquellos que lo sean calcular una base y su dimensión.

   1.1. $\mathcal{W} = \{(2x, x, -7x)/x \in \mathbb{R}\}$

   1.2. $\mathcal{W} = \{(x, y, z)/x + y + z = 0 \text{ y } x - y - z = 0\}$

   1.3. $\mathcal{W} = \{(x, y, z)/x = y + z + 1\}$

2. Analizar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ y para aquellos que lo sean calcular una base y su dimensión.

   2.1. $\mathcal{W} = \{M \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})/ \det(M) = 0\}$.

   2.2. $\mathcal{W} = \{M \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})/M = M^T\}$.

   2.3. $\mathcal{W} = \{M \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})/M \text{ es diagonal}\}$

3. Analizar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_2[\,t\,]$ (polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a dos), y para aquellos que lo sean calcular una base y su dimensión.

   3.1. $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[\,t\,] \,/\, 3p(0) + p(1) = 1\}$

   3.2. $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[\,t\,] \,/\, p'(0) + p''(0) = 0\}$

   3.4. $\mathcal{W} = \{p(t) \in \mathbb{R}_2[\,t\,] \,/\, p(0) = 0 \text{ y } p'(0) = 0\}$

4. Determinar m y n para que $(1, 1, 0, m), (3, -1, n, -1), (-3, 5, m, -4)$ sean dependientes.

5. Si $u = (1, 2, 1), v = (1, 3, 2), x = (1, 1, 0)$ e $y = (3, 8, 5)$, probar que $L(\{x, y\}) = L(\{u, v\})$.

6. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ sea $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$. Probar que $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{R}^3$. Calcular las coordenadas de los vectores de la base canónica respecto a $\mathcal{B}$.

7. Se consideran los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (1, 0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1, 0)$.

   7.1. Demostrar que son linealmente independientes.

   7.2. Ampliar a una base de $\mathbb{R}^4$ y respecto de esta base hallar las coordenadas de los vectores de la base canónica y del vector $u = (2, 1, -1, 0)$.

8. Sean $\mathcal{U} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x - y = z + t = 0\}, \mathcal{V} = L(\{(1, 1, -2, 2), (1, 0, -1, 0)\})$. Dar ecuaciones paramétricas, implícitas y bases para $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, y $\mathcal{U} + \mathcal{V}$.

9. Sean $\mathcal{W}_1 = L(\{(-1,0,0,1),(0,-1,-,1,1),(0,1,-1,0)\})$, y $\mathcal{W}_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x + t = 0\}$. Se pide:

   9.1. Ecuaciones implícitas de $\mathcal{W}_1$ y paramétricas de $\mathcal{W}_2$.

   9.2. Dar bases de $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

   9.3. Determinar para qué valor del parámetro λ el vector $(\lambda, 1, 2-\lambda, 1)$ es de $\mathcal{W}_1$.

10. En el espacio vectorial real $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \; / a+b+c+d=0 \right\}, \; \mathcal{W}_2 = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right).$$

   Calcular una base, ecuaciones implícitas y paramétricas de $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ y $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

11. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1),(2,1,-1),(0,0,3)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(-1,1,0),(2,0,1),(3,-1,0)\}$. Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. Dado el vector u de coordenadas $3,3,1$, respecto a $\mathcal{B}_2$, calcular sus coordenadas en $\mathcal{B}_1$.

12. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{B}^* = \{2e_1 - e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_1 + e_2 + e_3\} = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$.

   12.1 Demostrar que $\mathcal{B}^*$ es base de $\mathcal{V}$. Encontrar las matrices del cambio de base.

   12.2 Hallar las coordenadas respecto a $\mathcal{B}$ de $v = -2e_1^* + 3e_2^* + e_3^*$.

13. En el espacio vectorial real $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se considera la base

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Hallar las matrices de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_c$ y de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}_1$. Calcular las coordenadas en $\mathcal{B}_1$ de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

14. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}_2[t]$ se considera la base $\mathcal{B}_1 = \{1-t, t+t^2, 2t+t^2\}$. Calcular las matrices de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_c$ y de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}_1$. Dado el polinomio $p(t) = 2 + 3t + 3t^2$, determinar sus coordenadas en $\mathcal{B}_1$.