# Práctica N$^{\underline{0}}$2

# Cálculo Matricial y Sistemas

1. Sean

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$$

   Efectuar, cuando tenga sentido : $A^2, AB, B^2, AX, XA, BX, XB, BY, YA, YB, AY, XY$.

2. Encontrar las matrices que conmutan con

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ determinar $a$ y las matrices $B$ no nulas tales que $AB=O_2$.

4. Comprobar que $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es nilpotente ($A^3=O_3$). Demostrar que, en este caso, $I_3+A+A^2$ es la inversa de $I_3-A$.

5. Dada la ecuación matricial $AX+B^tC^t=D$ se pide:

   5.1 Si $A\in M_{3x3}$ y $D\in M_{3x2}$ calcular el orden de la matriz $X$, las filas de $C$ y las columnas de $B$.

   5.2 Siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=(5,-1,0)$ y $D=\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ calcular $X$ sin aplicar la regla de Cramer.

6. Sea A una matriz cuadrada que satisface el polinomio $(x-1)^2(x-2)$. Calcular $A^{-1}$.

7. Calcular $A^n$ para la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Calcular $A^n$ y $A^{-1}$ para la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$

9. Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ calcular $P^{-1}BP$ y $B^n$.

10. Siendo $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

   10.1 La matriz $X$ que verifica $2M - 3X = -N$.

   10.2 Las matrices $X$ e $Y$ tales que $2X - 3Y = M$ y $-3M + 4Y = -2N$.

   10.3 Las matrices $Z$ y $W$ tales que $MZ = N$ y $WM = N$.

11. Calcular, si existen, las inversas por Gauss-Jordan de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1,8 & 2,7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

12. Discutir, según los valores de $a$ y $b$ el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} b & 1 & 2a \\ ab & 1 & 2 \\ b & a & 2 \end{pmatrix}$.

13. Aplicar el método de Gauss a cada uno de los siguientes sistemas, determinando, si existe, la solución general:

$$13.1 \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x + y + 2z & = & 5 \\ 2x - y + 4z & = & 11 \\ -y + z & = & 3 \end{array} \right. \qquad 13.2 \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 2y + z & = & 1 \\ 5x + 3y + 3z & = & 2 \\ 7x + 4y + 5z & = & 3 \end{array} \right.$$

14. Idem. para los sistemas

$$14.1 \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y + z + 2u & = & -2 \\ 2x + 3y - z - 5u & = & 9 \\ 4x - y + z - u & = & 5 \\ 5x - 3y + 2z + u & = & 3 \end{array} \right. \qquad 14.2 \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z + 3u + 4v & = & 0 \\ 2x + 2y + 7z + 11u + 14v & = & 0 \\ 3x + 3y + 6z + 10u + 15v & = & 0 \end{array} \right.$$

15. Estudiar los siguientes sistemas según el valor del parámetro $a$, resolviéndolos cuando sea posible:

$$15.1 \quad \left\{ \begin{array}{rcl} ax + y + z & = & 1 \\ x + ay + z & = & 1 \\ x + y + az & = & 1 \end{array} \right. \qquad 15.2 \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x + ay + z & = & a + 1 \\ (a+1)x + y - az & = & 0 \\ 2x + y - z & = & 1 - a \end{array} \right.$$